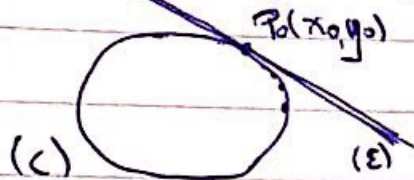


21/05/2019

Εφαρμογή Ευθείας κατ'επίκεντρο 2^{ου} βαθμού

$$(C): a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$



$$(E): y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

$$\text{Το σύστημα: } \begin{cases} (C): a_{11}x^2 + \dots + c = 0 \\ (E): y - y_0 = \lambda(x - x_0) \end{cases}$$

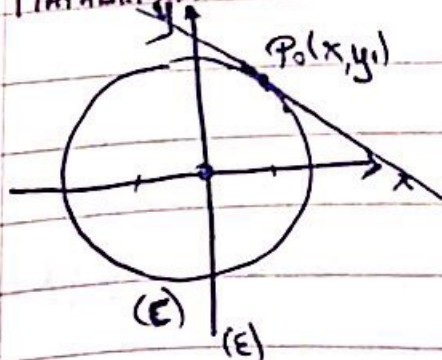
έχει το (x_0, y_0) ως διπλή λύση

ΠΡΟΤΥΠΟ: Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της κυκλικής τομής.

$$(C): a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

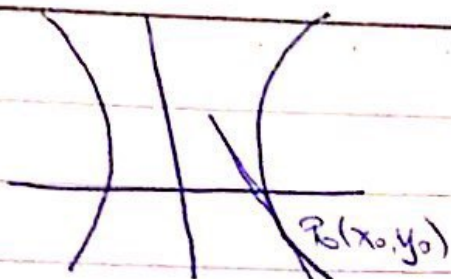
$$\text{στο σημείο του } P_0(x_0, y_0) \text{ είναι } (E): a_{11}x_0 + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + \frac{b_1}{2}x + \frac{b_2}{2}(y + y_0) + c = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



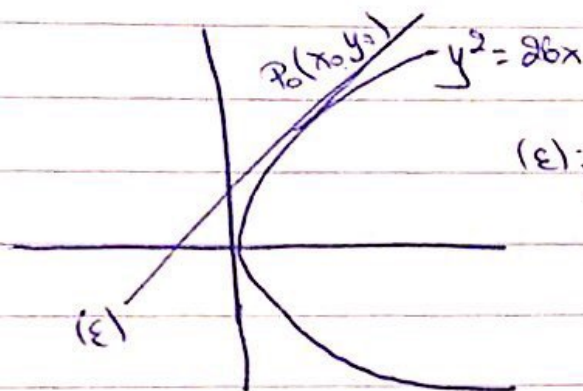
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(E): \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

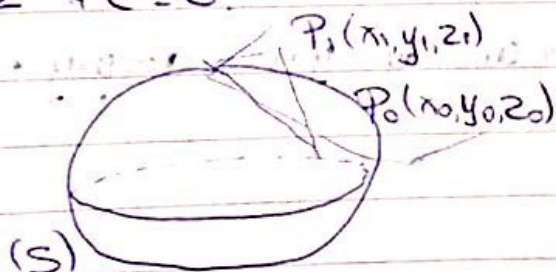
$$(\epsilon): \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



$$(\epsilon): yy_0 = b(x + x_0)$$

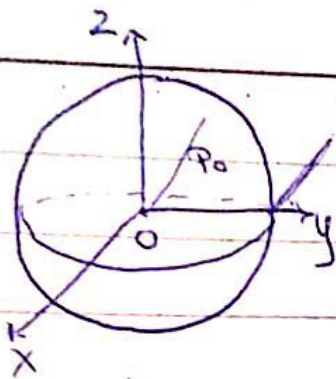
Εφαρμογή 2^η Σφαίρα

$$(S): a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$



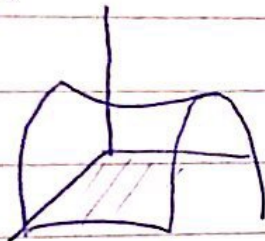
Μια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ καλείται εφαπτομένη ευθεία και (S) στο σημείο του P_0 αν-ν το συνήθει των εξισώσεων της (ϵ) και της (S) έχει το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ως διπλή ρίζα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Όπως οι εφαπτομένες της (S) στο τυχαίο σημείο της $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ορίζουν ένα επίπεδο (π) το οποίο καλείται **εφαπτομένο επίπεδο** της (S) στο σημείο P_0 και δίνεται από την εξίσωση: $a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{13}(x_0z + z_0x) + a_{23}(y_0z + z_0y) + \frac{b_1}{2}(x + x_0) + \frac{b_2}{2}(y + y_0) + \frac{b_3}{2}(z + z_0) + c = 0$.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{\gamma^2} = 1$$

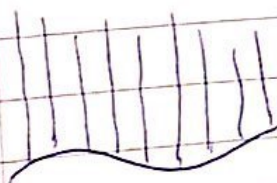


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma z, \quad \gamma > 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \gamma(z + z_0)$$

Αν $P_0(0,0,0)$ τότε το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση $z=0$.

Κωνικές επιφάνειες



Κυλινδρικές επιφάνειες

Ορισμός: Μια επιφάνεια कहलैतलै εὐκλείδους αν προοαηται από κινούμενη ευθεία, δηλαδή αν από κάθε σημείο διέρχεται ευθεία η οποία περιέχεται από επιφάνεια.

Παράδειγμα-1: Μονοκύβη υπερβολοειδές



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{\gamma} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{\gamma} \right) = \left(1 - \frac{y}{b} \right) \left(1 + \frac{y}{b} \right)$$

Διαιρούμε την ομογενή ευθείαν

$$(E): \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{\gamma} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b} \right) \end{cases}, \quad \lambda \neq 0$$

$$(\varepsilon) \subseteq (S') \quad \forall \lambda \neq 0$$

$$(\varepsilon)_\mu: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{\delta} = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{\delta} = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \mu \neq 0 \end{cases}$$

Άσκηση:

Να βρεθεί η εξίσωση της κυκλικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $O(0,0,0)$ και οδός την καμπύλη $(C): \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \end{cases}$

Λύση



Έστω (ε) τυχαίο γεννητήρι με εξίσωση:

$$\frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-0}{\delta} = t$$

$$(C) \quad \vec{O} + \vec{a} = (a, b, \delta) // (\varepsilon)$$

$$(\varepsilon): \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = \delta t \end{cases} \quad \text{Παραμετρικές εξίσξεις}$$

Η (ε) τέμνει την (C) , δηλαδή το σύστημα $\begin{cases} x = at, y = bt, z = \delta t \\ x^2 + y^2 = x, z = 1 \end{cases}$

Έχει λύση ως προς (x, y, z)

Κόβω απαριθμικά των x, y, z

$$t = \frac{1}{\delta}, \quad x = \frac{a}{\delta}, \quad y = \frac{b}{\delta}$$

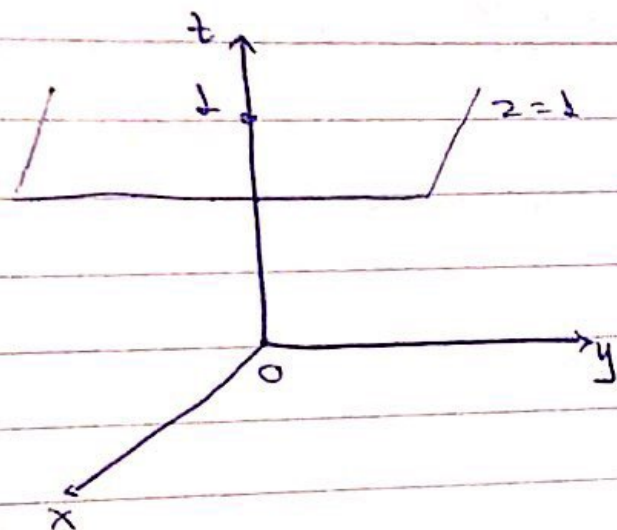
$$\frac{a^2}{\delta^2} + \frac{b^2}{\delta^2} = \frac{a}{\delta} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a\delta$$

$$\Rightarrow a^2 t^2 + b^2 t^2 = t^2 a\delta \Leftrightarrow (at)^2 + (bt)^2 = (ta)(t\delta) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = xz$$

$$\Leftrightarrow F(x-0, y-0, z-0) = 0$$

$$F(u, v, w) = u^2 + v^2 - uw$$

$$F(tu, tv, tw) = t^2 F(u, v, w)$$



$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

καμπύλη στο Oxy κέντρο $K(\frac{1}{2}, 0, 0)$
και ακτίνα $r = \frac{1}{2}$.

Παρατήρηση:

Η επιφάνεια η εξίσωση
 $xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$ στο χώρο;

Απάντηση:

$$xy - y + z^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow y(x-1) + z^2 - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-2) + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F(x-1, y-2, z-0) = 0 \text{ όπου } F(u, v, w) = uv - w^2$$

$$F(tu, tv, tw) = t^2 F(u, v, w) \Rightarrow F \text{ ομογενής}$$

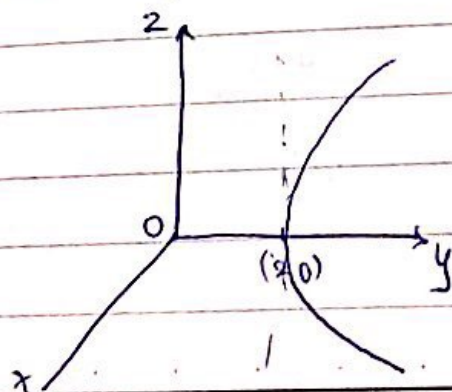
2ου βαθμού. Άρα η εξίσωση περιγράφει καμπύλη επιφανείας με κορυφή $O(1, 2, 0)$

Μια καμπύλη αγγίζει την

$$(c): \begin{cases} x=0 \\ xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z^2 - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z^2 = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$z^2 = y - 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} y$$



$$Y = y - 2$$

$$Z = z$$

Άσκηση

Παριστάνεται η εξίσωση $(*) 4\left(\frac{x-3}{y}\right)^2 + 9\left(\frac{y+2-1}{y}\right)^2 = 36, y \neq 0$

στο χώρο,

Λύση

$$(x) \Rightarrow 4(x-3)^2 + 9(y+2-1)^2 = 36y^2$$

$$F(x-3, y, z-1) = 0, \text{ όπου}$$

$$F(u, v, w) = 4u^2 + 9(v+w)^2 - 36w^2$$

$$F(tu, tv, tw) = t^2 \cdot F(u, v, w)$$

$\Rightarrow F$ είναι ομογενής 2ου βαθμού

Άρα προκύπτει περί κυκλικής επιφάνειας με κέντρο $K(3, 0, 1)$

Μια καμπύλη οδηγό είναι:

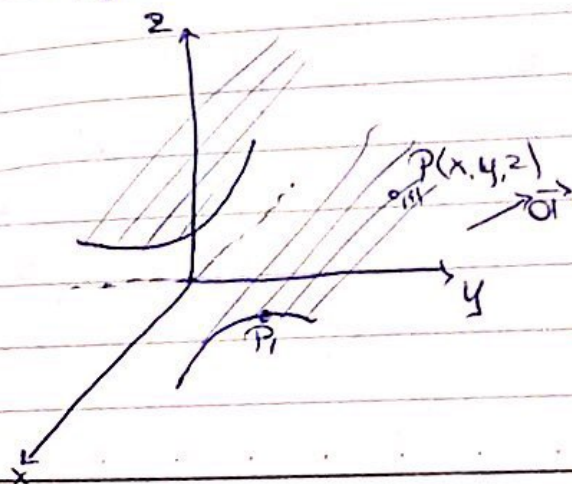
$$n(c): \begin{cases} z=0 \\ 4(x-3)^2 + 9(y+2-1)^2 = 36y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ 4(x-3)^2 + 9(y-1)^2 = 36y^2 \\ 4x^2 - 24y^2 \end{cases} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

Άσκηση: Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτορες παράλληλους προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 2)$ και οδηγό καμπύλη των

$$(c): \begin{cases} xy=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Λύση: Έστω $P(x, y, z)$ τυχαίον σημείον στο (c)



$$(c) : \frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + t \\ z = z_1 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 y_1 = 1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$z = 2t$$

$$y = y - t = y - \frac{z}{2}$$

$$x_1 = x - t = x - \frac{z}{2}$$

$$\left(x - \frac{z}{2}\right) \left(y - \frac{z}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{z}{2}\right) \left(y - \frac{z}{2}\right) = 0$$

$$F(u, v) = uv - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - \frac{z}{2} = 0 \\ y - \frac{z}{2} = 0 \end{cases}$$